

# Exercises: Final Session

Felix Breuer, Manuel Di Sabatino

FS 2024

Bestimme folgende Integrale:

**1**

$$\int \frac{1}{x \ln(x) + 2x} dx$$

wobei  $x \geq 1$

**2**

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 4x + 2}{(x-1)(x+3)} dx$$

**3**

$$\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx$$

**4**

$$\int \frac{\cos y}{\sin^2 y + \sin y - 6} dy$$

**5**

$$\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

**6**

$$\int x \ln^2(x) dx$$

**7**

Finde  $g'(\pi/4)$ , wobei

$$g(x) = \int_x^{x+\pi/2} \sin(t) \cos(t) dt$$

**8**

Berechne das Taylorpolynom der dritten Ordnung von  $f(x) = \cos(\pi\sqrt{x})$  bei  $x_0 = 1$

**9**

Seien  $(a_k)_{k \geq 1}$ ,  $(b_k)_{k \geq 1}$  und  $(c_k)_{k \geq 1}$  drei Folgen. Sei  $(d_k)_{k \geq 1}$  definiert durch

$$d_k = \frac{(a_k)^2 + \sin(b_k)}{1 + \exp(c_k)}$$

Wahr oder Falsch?

(i) Wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  absolut konvergieren, gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = 0$ .

(ii) wenn  $(d_k)_{k \geq 1}$  beschränkt ist, muss mindestens eine der Folgen  $(a_k)_{k \geq 1}$ ,  $(b_k)_{k \geq 1}$  und  $(c_k)_{k \geq 1}$  beschränkt sein.

**10**

Konvergiert folgende Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^8 + n^3 - 1}}$$

## 11

Bestimme  $a, b \in \mathbb{R}$ , sodass  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - (a+bx)}{x^2}$  in  $\mathbb{R}$  existiert und den Grenzwert in diesem Fall

## 12

Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(|x|^{\sin(x)})$$

## 13

Seien  $\sum_{n \geq 0} a_n, \sum_{n \geq 0} b_n$  zwei konvergente Reihen mit reellem Grenzwert.

Welche der folgenden Reihen konvergieren?

1.  $\sum_{n \geq 0} a_n^k \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
2.  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{a_n}$
3.  $\sum_{n \geq 0} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
4.  $\sum_{n \geq 0} p(a_n + b_n) \forall p \in \mathbb{R}$

## 14

Finde **alle**  $x, y \in \mathbb{N}, x \neq y$ , sodass  $x^y = y^x$

## 15

Bestimme den Konvergenzradius von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{((n-1)!)^3} x^n$$

## 16

Konvergiert folgende Reihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\ln(n)^n}$$

## 17 ★

Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)}$$

Hint: Riemann-Summen