Session 1 Exercises

Felix Breuer

February 2024

1 Intervalle

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$\bigcup_{n \geq 1} [0, 1 + \frac{1}{n}] = [0, 2]$$

$$\bigcap_{n \geq 1} [0, 1 + \frac{1}{n}] = [0, 1]$$

$$\bigcup_{n \geq 1} [0, 1 - \frac{1}{n}] = [0, 1)$$

2 $\mathbb{R}$ axiomatisch

- $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$: V-Axiom als Unterschied (siehe Seite 3 des Skripts für Übersicht)
- Archimedisches Prinzip
- $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$
  Äquivalente Formulierung:
  $$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists q \in \mathbb{Q} : q \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$
- Beweis durch Gegenbeispiel, dass V-Axiom nicht für $\mathbb{Q}$ gilt:
  $A = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}, B = (\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}$

3 Supremum und Infimum

$A, B \subset \mathbb{R}$, nicht leer

- $\sup\{A \cup B\} = \max\{\sup A, \sup B\}$
- $A \subset B \subset \mathbb{R}$. Begründe, warum folgendes gilt: B nach oben beschränkt $\implies \sup A \leq \sup B$ B nach unten beschränkt $\implies \inf B \leq \inf A$

Bestimme jeweils Supremum und Infimum (mit Beweis für die ersten zwei):

- $$\{\frac{2x}{x+3} \mid x > 0\}$$
- $$\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$
- $$\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}^*\}$$
- $$\{\frac{(-1)^m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}^*\}$$

Weitere Aufgabe (war nicht in Übung)
Sei $A \subset \mathbb{R}$ von oben beschränkt und $\forall n \in \mathbb{N}^* : s + \frac{1}{n}$ eine obere Schranke, $s - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke. Zeige, dass $s = \sup A$