Exercise Session 12

Felix Breuer

FS 2024

1 Taylorapproximation

1.1 Grenzwerte berechnen

- Berechne folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to\infty} x^2(1-\cos(1/x))$$

Wir berechnen die Taylorapproximation von cos ($n = 2$ bei $x_0 = 0$) mit Lagrange-Rest und erhalten $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\sin(\xi_x)x^3}{6}$ für ein ξ zwischen x und 0. Einsetzen ergibt

$$\lim_{x\to\infty} x^2(1-\cos(1/x)) = \lim_{x\to\infty} x^2(1-(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{\sin(\xi_{1/x})}{6x^3})) = \lim_{x\to\infty}(1/2-\frac{\sin(\xi_{1/x})}{6x}) = 1/2$$

wobei der letzte Schritt wie folgt begründet ist: $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$ und $\lim_{x\to\infty} \sin(\xi_{1/x}) = \sin(0) = 0$ mit Stetigkeit von sin und da $\lim_{x\to\infty} \xi_1 = 0$. Somit gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(\xi_{1/x})}{6x} = 0$.

Hinreichendes Kriterium für lokale Extrempunkte: siehe hier

2 Das Riemann-Integral

- Aufgabe: Integrierbarkeit mit Definition zeigen

Zeige, dass $f(x) = 1_{x=1} = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$ auf $[0,2]$ integrierbar ist

Wir definieren eine Folge von Partitionen (P_n) von $[0,2]$ für die $\lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = L \in \mathbb{R}$ gilt. Zusammen mit folgendem Resultat können wir schliessen, dass f integrierbar ist:

Eine beschränkte Funktion f ist auf $[a,b]$ genau dann integrierbar, wenn $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ eine Partition P_ε von $[a,b]$, sodass: $S(f,P_\varepsilon) - s(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$ (Satz 5.1.4 im Skript).

Sei $P_n = \{0, 1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, 2\}$. Dann ist $s(f,P_n) = 0$ für ein beliebiges $n \geq 1$, somit auch $\lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = 0$.

Gleichsam gilt $S(f,P_n) = (1-\frac{1}{n})\cdot 0 + (1+\frac{1}{n}-(1-\frac{1}{n}))\cdot 1 + (2-(1+\frac{1}{n}))\cdot 0 = \frac{2}{n}$ und so $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = 0$. Wir schliessen, dass $1_{x=1}$ auf $[0,2]$ integrierbar ist.

- Aufgabe: Gibt es eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) = sign(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$?

Nein, wir verwenden ein Resultat von einem Quiz von Woche 10 (siehe hier): die Ableitung einer Funktion kann keine Sprungunstetigkeiten haben, also Punkte x_0 bei denen $\lim_{x\to x_0^+} f'(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ obwohl beide Grenzwerte existieren und gleich reellen Zahlen sind. Bei f' gilt jedoch, dass $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$.

2.1 Fundamentalsatz

- Aufgabe:

Bestimme $(\int_1^{e^x} \cos(\pi t^2) dt)'$ (Teil von einer Aufgabe der FS22 Prüfung)

Sei $F(x) = \int_1^x \cos(\pi t^2) dt$. Mit dem Fundamentalsatz der Differentialrechnung wissen wir, dass $F'(x) = \cos(\pi x^2)$. Der einzige Unterschied zu dieser Aufgabe ist, dass der obere Bound e^x statt x ist. Für $g(x) = e^x$ ist $F(g(x))$ die Funktion, deren Ableitung wir suchen. Mit der Kettenregel erhält man $(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = \cos(\pi e^{2x})e^x$.

2.2 Partielle Integration

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Beispiel:

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e-1) = 1$$

wobei wir im ersten Schritt partielle Integration mit $f(x) = x, g(x) = e^x$ angewandt haben.

- Aufgabe: Bestimme

$$\int_0^1 x^2 e^x dx$$

Wir wenden zwei Mal partielle Integration an:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - ([2xe^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx)$$

$$= [x^2 e^x]_0^1 - ([2xe^x]_0^1 - [2e^x]_0^1) = e - 2e + (2e - 2) = e - 2$$

2.3 Substitution

$\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $\phi([a,b]) \subset I$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)du$$

Beispiel:

$$\int_0^1 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_{\phi(0)}^{\phi(1)} e^u du = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u du = \frac{1}{2}(e-1)$$

mit $f(x) = e^x, \phi(x) = x^2$

- Aufgabe: Bestimme

$$\int_1^2 \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

Hier kann man fast direkt Substitution anwenden mit $u = \sqrt{x}$, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$:
$\int_1^2 \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2\int_1^2 \frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx = 2\int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{2}} \sin(u)du = 2(-\cos(\sqrt{2}) + \cos(1))$

- Aufgabe: Bestimme

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

Wir machen die Substitution $x = \sin(u)$:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1)} \sqrt{1-\sin(u)^2}\cos(u)du = \int_0^{\pi/2} \cos^2(u)du$$

Dieses Integral lässt sich mit partieller Integration oder trigonometrischen Identitäten lösen.

$$\cos^2(x) = (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^2 = \frac{e^{2ix}+2+e^{-2ix}}{4} = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(u)du = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos(2x))dx = [\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}\sin(2x))]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}(\pi/2+0) = \pi/4$$

Anmerkung zu dx:

Formal gibt das dx im Integral mit unserer Definition nur an, nach welcher Variable integriert wird und ist insbesondere keine Zahl, mit der man multiplizieren kann (intuitiv und historisch hat es mehr Bedeutung, siehe zB. hier. Es gibt auch eine eigene Theorie der Analysis, in der das dx rigoros gemacht wird: Nonstandard analysis).

Trotzdem ist folgende Vorgehensweise/Merkhilfe oft sinnvoll (und durch die Kettenregel begründet):

1. Finde passendes $u = \phi(x)$, das das Integral vereinfacht
2. Schreibe $\frac{du}{dx} = \phi'(x)$ als die Ableitung von u nach x
3. Folgere, dass $du = \phi'(x)dx$

2.4 Partialbruchzerlegung

Für allgemeine Vorgehensweise: siehe Vorlesungsnotizen

Ich möchte an einem Beispiel zeigen, dass man den letzten Schritt (Lösen eines linearen Gleichungssystems nach Koeffizientenvergleich) oft einfacher durchführen kann (wenn die Faktoren im Nenner linear sind, also jede Nullstelle des Polynoms im Nenner genau ein Mal vorkommt):

Bestimme $\int_a^b \frac{1}{x^2+3x+2}dx$ mittels Partialbruchzerlegung

1. Grad des Polynoms im Zähler ist kleiner als der im Nenner, wir müssen also keine Polynomdivision machen
2. Wir können die Nullstellen des Polynoms im Nenner mit Faktorisierung finden: $\int_a^b \frac{1}{x^2+3x+2}dx = \int_a^b \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$
3. Finde $A, B \in \mathbb{R}$, sodass $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$
   (a) Multipliziere mit $(x+1)$ auf beiden Seiten:
   $\frac{1}{(x+2)} = A + \frac{b(x+1)}{x+2}$

(b) Die Gleichheit gilt für beliebige x, also inbesondere für $x = -1$, womit der Term mit B verschwindet und die linke Seite der Gleichung dem Wert von A entspricht
$A = \frac{1}{-1+2} = 1$
Auf gleiche Weise erhält man, dass $B = -1$

(c) $\int_a^b \frac{1}{x^2+3x+2} dx = \int_a^b \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} dx = [\log(|x+1|) - \log(|x+2|)]_a^b$

Siehe: Heaviside cover-up method

2.5 Tipps zum Üben von Integralen

Folgende Ressourcen empfehle ich:

- Übungsblätter!
- T.Michaels Analysis
- Integraltrainer auf Moodle

Allgemeine Vorgehensweise:

Partielle Integration, Substitution und Partialbruchzerlegung anwenden, um ein Integral auf schon bekannte Integrale/Funktionen, deren Stammfunktionen bekannt sind, zurückzuführen. Es lohnt sich, möglichst viele Integrale selbst zu lösen, um typische Muster (schneller) zu erkennen.

• Hat die Funktion im Integral eine Form, die direkt auf eine Regel/Technik hinweist?

zB. hat $\int_1^2 \frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx$ genau die Form $\int_1^2 f(\phi(x))\phi'(x)dx$; ein Integral eines Bruchs zweier Polynome könnte gut mit Partialbruchzerlegung lösbar sein

• Welche Substitution würde die derzeitige Funktion vereinfachen, egal ob geschrieben als $x = \dots$ oder $u = \dots$?

zB. wollen wir $\int_a^b f(x)dx$ berechnen, kennen aber die Stammfunktion von f nicht. Es macht oft Sinn, $x = g(u)$ zu substituieren, wenn die Stammfunktion von $f(g(u))$ bekannt ist. $dx/du = g'(u)$, also $dx = g'(u)du$. Damit erhält man $\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))g'(u)du$