Session 4 Exercises

Felix Breuer

FS 2024

1 Quiz

For statements (where no prompt like "Find ..." is given), determine if they are true or false (and why).

1. $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : P(n) \qquad (1)$

   $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : P(n) \qquad (2)$

   Which of the following options are true for (1), which are true for (2)?

   (a) $P(n)$ holds for all but finitely many $n \in \mathbb{N}$

   (b) $P(n)$ holds for infinitely many n

   Assuming (1) holds, we can follow (b) but not (a). Assuming (2), (a) and (b) are true.

2. A sequence $(a_n)_{n\geq 1}$ converges (in $\mathbb{R}$) $\iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N$: $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Try to explain the statement intuitively.

   This is the Cauchy criterion as seen in the lecture (often used with series). One possible way to interpret the statement is that the difference between terms of the sequence becomes arbitrarily small once their index is at least N (where N depends on ε).

3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \dots$

   $= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = 3^n$ (binomial theorem)

4. What is the set of accumulation points of the sequence $(a_n) = (1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots)$?

   Answer: $\mathbb{N}^*$

5. $(a_n)_{n\geq 1}$ has a divergent subsequence $\implies (a_n)_{n\geq 1}$ diverges

   True, consider the contrapositive of the statement ($A \to B \equiv \neg B \to \neg A$) which can be proven via the definition of convergence (same proof as the direction $\Rightarrow$ in exercise 3.6).

6. $(a_n)_{n\geq 1}$ is increasing and has a convergent subsequence $\implies$ $(a_n)_{n\geq 1}$ converges

   True, a proof is as follows: Per assumption $(a_n)_{n\geq 1}$ has a convergent subsequence $(a_{l(n)})$. Any convergent sequence is bounded (in particular from above), hence there exists $C \in \mathbb{R}$ such that $a_{l(n)} \leq C$ $\forall n \geq 1$. As $l : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ is strictly increasing, $l(n) \geq n$ $\forall n \geq 1$. As $a_{n+1} \geq a_n$ for any n, $C \geq a_{l(n)} \geq a_n$, meaning that a_n is also bounded. We follow that a_n converges as it is increasing and bounded from above (Satz von Weierstrass).

2 Binomische Formel

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
Eine kombinatorische Herleitung ist wie folgt: $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b)$ Wenn wir dieses Produkt ausmultiplizieren (Distributivgesetz), müssen wir für jeden Term in der Summe für jeden Faktor $(a+b)$ entscheiden, ob wir a oder b wählen. Diese Entscheidung ist also binär und equivalent dazu, von einer Menge mit n Elementen Teilmengen zu bilden: Für jedes Element entscheiden wir, ob es in die Menge kommt (a) oder nicht (b). Die Reihenfolge ist uns egal, da Multiplikation reeller Zahlen kommutativ ist: Es zählt nur, wie viele Elemente k die resultierende Menge hat. Somit erhält man $\sum_{T\subset\{1,\dots n\}} a^{|T|} b^{n-|T|} = \sum_{\substack{T\subset\{1,\dots n\} \\ |T|=k}} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

3 Wichtiges zu Reihen

Ich empfehle, sich Herleitungen zu folgenden Resultaten zu merken.

1. Formel für Partialsummen geometrischer Reihe: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Falls $|q| < 1$, konvergiert die Reihe.

2. Falls $S_n \sum_{n\geq 1} a_n$ konvergiert, gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   $0 = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_n) = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_n$

   Noch allgemeiner gilt dann $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{N} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=N+1}^{n} a_k$ (für ein fixes $N \in \mathbb{N}$). $\sum_{k=0}^{n} a_k$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{k=N+1}^{n} a_k$ konvergiert.

4 Konvergenz von Reihen zeigen

1. Resultate für Folgen (Rechenregeln, Cauchy-Kriterium)

2. Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz

3. Vergleichssatz (comparison test)
4. Leibnizkriterium (alternating series test)
5. Quotientenkriterium (ratio test)
6. Wurzelkriterium (root test)

4.1 Resultate für Folgen

Jede Reihe ist auch eine Folge, somit lassen sich die Resultate für Folgen auch für Reihen anwenden. Die meisten Aufgaben fragen, ob eine Reihe konvergiert oder nicht, aber nicht genau gegen welchen Grenzwert. Oft ist es nicht einfach, den Grenzwert einer Reihe zu bestimmen (zB. Values of Riemann zeta function). Besonders die "Rechenregeln" für Grenzwerte (Satz 2.7.4.) und das Cauchy-Kriterium (zB. in Aufgabe 3.3.) sind oft nützlich.

4.2 Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz

Behauptung: $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ konvergiert $\implies \sum_{n\geq 1} a_n$ konvergiert

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir zeigen, dass $\sum_{n\geq 1} a_n$ das Cauchy-Kriterium erfüllt. Für $n \geq m$ gilt: $|S_n - S_m| = |\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{m} a_k| = |\sum_{k=m+1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|$ (Dreiecksungleichung). Mit dem Cauchy-Kriterium angewandt auf $\sum_{k=1}^{n} |a_k|$ mit $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{n-m}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq m \geq N$: $|S_n - S_m| = |\sum_{k=m+1}^{n} |a_k|| = \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \frac{\varepsilon}{n-m}$. Damit erhalten wir $\sum_{k=m+1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < (n-m)\frac{\varepsilon}{n-m} = \varepsilon$. $\sum_{n\geq 1} a_n$ erfüllt also auch das Cauchy-Kriterium und konvergiert somit.
Die Aussage gilt nicht anders herum, zB. konvergiert $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ bedingt (konvergiert, aber nicht absolut).

4.3 Vergleichssatz

$0 \leq a_n \leq b_n \ \forall n \geq 1$

- $\sum_{n\geq 1} b_n$ konvergiert $\implies \sum_{n\geq 1} a_n$ konvergiert
- $\sum_{n\geq 1} a_n$ divergiert $\implies \sum_{n\geq 1} b_n$ divergiert

Dieser Satz ist in vielen Fällen nützlich, wenn man einen Vergleich zu Reihen, von denen man schon weiss, ob sie konvergieren, machen kann.

Beispiele:

$$0 \leq \frac{2^n + 1}{3^n + 1} \leq \frac{2^n + 1}{3^n} = (\frac{2}{3})^n + (\frac{1}{3})^n$$

$\sum_{n\geq 1} (\frac{2}{3})^n + (\frac{1}{3})^n$ konvergiert (Summe geometrischer Reihen mit $|q| < 1$), somit auch $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n+1}{3^n+1}$.

$$\frac{n}{n^2-\cos^2(n)} = \frac{1}{n-\frac{\cos^2(n)}{n}} \geq \frac{1}{n} \geq 0$$

Da $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ divergiert, divergiert auch $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{n^2-\cos^2(n)}$

4.4 Leibnizkriterium

(a_n) monoton fallend, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \implies \sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$ konvergiert
Hier ist wichtig, dass a_n monoton fallend ist. Es gibt Beispiele, die alle Bedingungen ausser dieser erfüllen, die rechte Seite der Implikation aber nicht gilt.

Beispiele:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n\pi)}{n^2-n} = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2-n}$$

4.5 Quotientenkriterium

Annahme: $a_n \neq 0\ \forall n \geq 1$.

- $\limsup_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n\geq 1} a_n$ konvergiert absolut
- $\liminf_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n\geq 1} a_n$ divergiert

Beispiel:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)}$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|(-10)^{n+1}4^{2n+1}(n+1)|}{|(-10)^n 4^{2n+3}(n+2)|} = \frac{|(-10)(n+1)}{4^2(n+2)} = \frac{10}{16}\frac{n+1}{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10}{16}\frac{n+1}{n+2} = \frac{10}{16} < 1$$

Somit konvergiert die Reihe.

Wenn sich im Bruch $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ viel kürzt, ist das Quotientenkriterium oft eine gute Wahl: zB. bei $n!, 3^n, e^n$

4.6 Wurzelkriterium

- $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n\geq 1} a_n$ konvergiert absolut
- $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n\geq 1} a_n$ divergiert

Beispiel:

$$\sum_{n\geq 1}(3+\frac{1}{n})^n$$

$\sqrt[n]{|(3+\frac{1}{n})^n|} = 3+\frac{1}{n} > 1$, womit die Reihe divergiert.

Gut anwendbar, wenn eine n-te Potenz in a_n vorkommt.
Generell ist das Wurzelkriterium stärker als das Quotientenkriterium (es gibt Beispiele, bei denen das Quotientenkriterium fehlschlägt, das Wurzelkriterium aber funktioniert, umgekehrt aber nicht).
Wenn $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ und $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$, sagt uns weder das Wurzel- noch Quotientenkriterium etwas darüber, ob die Reihe konvergiert.

5 Potenzreihen

Ziel: Herausfinden, in welchem Intervall z sein muss, damit die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ konvergiert.

Dafür verwendet man meist entweder das Wurzel- oder Quotientenkriterium.

Der Konvergenzradius ρ von $\sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ (Konvergenz für $|z| < \rho$, Divergenz für $|z| > \rho$) ist durch das Wurzelkriterium definiert:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n z^n|} = |z| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1 \iff |z| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \rho$$

Falls $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$, dann definieren wir $\rho = +\infty$.

Wichtig: Falls $|z| = \rho$, haben wir mit Wurzel- und Quotientenkriterium keine Gewissheit, ob die Reihe konvergiert oder nicht (eines der beiden ist möglich, je nach Reihe).

Beispiele:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n}{4^n} z^n$$

Hier kann man das Quotientenkriterium anwenden:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|(-1)^{n+1}(n+1)x^{n+1}|}{|4^{n+1}|}\frac{|4^n|}{|(-1)^n n x^n|} = \frac{|-(n+1)x|}{4n} = \frac{|x|}{4}\frac{n+1}{n}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty}\frac{|x|}{4}\frac{n+1}{n} = \frac{|x|}{4}\limsup_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{|x|}{4} < 1 \iff |x| < 4$$

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{4} > 1 \iff |x| > 4$$

Der Konvergenzradius ist 4.

$$\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^n}$$

Mit dem Wurzelkriterium erhält man $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, womit $\rho = +\infty$. Die Reihe konvergiert für ein beliebiges $z \in \mathbb{C}$.

6 Hints

4.2.: Zusätzlich zu den oben aufgeführten Ansätzen sind auch folgende hilfreich: Wurzeltrick, Vereinfachen von Quotient mit Polynom in Zähler und Nenner, siehe Woche 2
4.3.: Wurzel- und Quotientenkriterium, Beispiel 2.2.5. im Skript, vierte Quiz-Frage von Woche 3
4.4.: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c} = 1$ für ein fixes $c > 0$ (im Beweis des Quotientenkriteriums ist N fix, womit auch a_N fix ist)