Exercise Session 5

Felix Breuer

FS 2024

1 Quiz/Introduction

For statements (where no prompt like "Find ..." is given), determine if they are true or false (and why).

1. Intuition hinter Wurzel- und Quotientenkriterium: Vergleich zu geometrischer Reihe. Der Beweis ist in diesem Fall hilfreich.
2. $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ für $x, y \geq 0$

   Gilt immer: Da die Funktion $f(x) = x^2$ für $x \geq 0$ monoton steigend ist, wird die Ungleichung durch Anwendung von f nicht verletzt, es gilt: $x + y \leq x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y$ (andere Richtung mit $\sqrt{x}$)
3. Es gibt Folgen $(x_n), (y_n)$, sodass $\sum_{n\geq 1} x_n + y_n$ und $\sum_{n\geq 1} x_n$ konvergent, $\sum_{n\geq 1} y_n$ divergent

   Nicht möglich, wir erhalten einen Widerspruch mit Satz 2.7.4. angewandt mit $a_n = x_n + y_n, b_n = -x_n$.

2 Umordnungen, Doppelreihen, Cauchy-Produkt

Hier möchte ich drei Sätze aus der Vorlesung hervorheben mit dem Motto "absolute Konvergenz ist gut". Am wichtigsten von diesen drei ist der zum Cauchy-Produkt.

Nebenbemerkung (nicht direkt in Verbindung zum Vorlesungsstoff): Die Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ definiert durch $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}b_j$ ist die discrete convolution von (a_n) und (b_n). Diese Operation ist auch speziell für Informatik relevant. Höchstwahrscheinlich wurde sie dieses Semester schon in PProg verwendet (image processing) und auch im Kontext der Wahrscheinlichkeitstheorie kommt sie vor. Falls ihr mehr wissen wollt, kann ich folgendes Video empfehlen:
https://www.youtube.com/watch?v=KuXjwB4LzSA.

2.1 Umordnungen

$\sum_{n\geq 1} a_n$ konvergiert absolut $\implies$ jede Umordnung der Reihe konvergiert mit gleichem Grenzwert

2.2 Doppelreihen

Falls es ein $B \geq 0$ gibt, sodass $\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq B \ \forall m \geq 0$, konvergieren $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ und $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$ (absolut) zum gleichen Grenzwert und

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$$

(Verkürzte Version von Satz 2.7.23)

2.3 Cauchy-Produkt

Falls $\sum_{n\geq 0} a_n$ und $\sum_{n\geq 0} b_n$ absolut konvergieren, konvergiert ihr Cauchy Produkt $\sum_{n\geq 0} \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j$ und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i)(\sum_{j=0}^{\infty} b_j)$$

Aufgabe: Zeige, dass das Cauchy Produkt der folgenden zwei Reihen absolut konvergiert, wenn $a - b = 1$.

$$a + \sum_{n\geq 1} a^n$$

$$-b + \sum_{n\geq 1} b^n$$

3 Stetigkeit

Es wurden zwei Definition eingeführt:
f ist stetig an x_0, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{1}$$

$$\forall (x_n)_{n\geq 1} : \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \tag{2}$$

Die zweite Definition über konvergente Folgen eignet sich häufig gut dafür, zu beweisen, dass eine Funktion nicht bei x_0 stetig ist: Dies kann man zeigen, indem man eine Folge (x_n) findet, die gegen x_0 konvergiert, für die aber $f(x_n)$ nicht gegen $f(x_0)$ konvergiert. Ähnlich wie das N in Definition von Konvergenz von Folgen ist oft die Hauptaufgabe in Stetigkeitsbeweisen, die direkt die Definition verwenden, ein passendes δ zu finden.

Intuitiv drückt Stetigkeit folgendes aus:
Die Funktion

- macht keine Sprünge
- lässt sich ohne Absetzen des Stiftes zeichnen
- eine kleine Veränderung im Input führt auch nur zu einer kleinen Veränderung im Output
- Präziser: Wenn wir eine beliebige ε-Umgebung um $f(x_0)$ wählen, können wir immer auch eine δ-Umgebung um x_0 finden, sodass sich für alle x in dieser Umgebung der Funktionswert $f(x)$ im Vergleich zu $f(x_0)$ um maximal ε verändert (also in der ε-Umgebung um $f(x_0)$ bleibt)

Beispiele stetiger Funktionen:

1. Beliebige Polynome: $1, x, x^2 + 7x^3$
2. $x \mapsto |x|$
3. $x \mapsto \sqrt{x}$ für $x \geq 0$
4. $\exp(x)$
5. $\sin(x), \cos(x)$
6. $\frac{1}{x-1}$, wenn wir den Definitionsbereich auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ einschränken

3.1 Kombinationen stetiger Funktionen sind stetig

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0, $D \subset \mathbb{R}$. Dann sind auch folgende Funktionen in x_0 stetig:

1. $f + g$
2. $f \cdot g$
3. $\frac{f}{g}$, wenn $g(x_0) \neq 0$ und eingeschränkt auf neuen Definitionsbereich $D \cap \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$
4. $f \circ g$

Beispiel: $\exp(2x + 3)$ ist stetig, da $2x + 3$ und $\exp(x)$ stetig sind und die Verknüpfung stetiger Funktionen stetig ist.

Aufgabe: Finde $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass f für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & x < \alpha \\ \alpha & x = \alpha \\ 2x & x > \alpha \end{cases}$$

Da $x+3$ und $2x$ stetig sind, ist $f(x)$ für $x \neq \alpha$ auch stetig. Somit müssen wir ein α finden, sodass $x+3 = 2x$ für $x = \alpha$, damit es bei α keinen "Sprung" in der Funktion gibt und, egal wie wir uns an α mit einer Folge (x_n) (die gegen α konvergiert) annähern (zB. nur von rechts oder nur von links), $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\alpha)$ gilt (Folgendefinition von Stetigkeit).

Aufgabe: Zeige, dass g bei 0 stetig ist.

$$g(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir finden nun ein $\delta > 0$, sodass $\forall x \in \mathbb{R} : |x - 0| < \delta \implies |f(x) - f(0)| < \varepsilon$. Dafür schätzen wir $|f(x) - f(0)|$ ab: $|x\sin(\frac{1}{x}) - 0| = |x||\sin(\frac{1}{x})| \leq |x| \overset{!}{<} \varepsilon$ wenn $|x| < \delta$. Wir wählen somit $\delta = \varepsilon$.

Aufgabe: Zeige, dass h bei 0 unstetig ist.

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Wir zeigen, dass eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ existiert, sodass $h(x_n)$ nicht gegen $h(0) = 1$ konvergiert. Sei $x_n = \frac{\pi}{n}$. Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} f(\frac{\pi}{n}) = 0$, da $h(\frac{\pi}{n}) = 0$ für alle $n \geq 1$. Somit ist h nicht bei 0 stetig. Man kann das Argument für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ verallgemeinern.

4 Hints

5.2.: Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Wende das zusammen mit der Definition des Cauchy-Produkts an

5.3.: Die einzelnen Teilfunktionen sind stetig. Wie im Beispiel oben müssen a, b bestimmt werden, sodass die Teilfunktionen an den Übergangspunkten (zB. $x = -1$) übereinstimmen

5.4.: Die Idee hier ist, die Aussage des Hinweises zu beachten (1-Lipschitz-Stetigkeit) und dann direkt die $\varepsilon - \delta$ Definition von Stetigkeit und die Aussage des Hinweises zu verwenden.

5.5.: Man kann den Punkt 1/2 und alle $x \neq 1/2$ separat betrachten. Für letzteres ist die zweite Defintion von Stetigkeit über Folgen hilfreich

5.6.: Verwende die $\varepsilon - \delta$ Definition von Stetigkeit und wähle dabei ein passendes ε, um auf die Behauptung zu schliessen.

5.7.: Kein direkter Hint, aber die Idee ist, sich zu überlegen, welche Annahmen beim Zwischenwertsatz wirklich notwendig sind: Muss der Definitionsbereich ein Intervall sein, die Funktion auf $\mathbb{R}$ definiert sein?

5.8.: Definiere eine Hilfsfunktion g und wende dann den Zwischenwertsatz an. Ein weiterer Hinweis ist unten.

Zeige, dass $g(0) \geq a, g(1) \leq a$, dann gibt es ein $x_0 \in [0,1]$, dass $g(x_0) = a$