Exercise Session 6

Felix Breuer

FS 2024

1 Quiz

For statements (where no prompt like "Find ..." is given), determine if they are true or false (and why).

1. Let $A \subset \mathbb{R}$ be bounded. If:

   (a) $\sup A \leq c$

   (b) $\lim_{n\to\infty} a_n = c$

   (c) $a_n \in A \; \forall n \geq 1$

   Then $\sup A = c$.

   True, can be proven via a proof by contradiction. Proof sketch: Assume $\sup A \neq c$, then $\sup A = c - \varepsilon < c$ for some $\varepsilon > 0$. Intuitively, this leads to a contradiction as a_n gets arbitrarily close to c for large n (closer than $c - \varepsilon$) while $a_n \in A$.

2. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists (a_n)_{n\geq 1} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \varepsilon$

   True, we can always construct such a series. For example, $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon \frac{1}{2^n} = \varepsilon$ (this can be derived from the formula for the limit of a geometric series by starting from $n = 1$ instead of $n = 0$).

3. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be continuous, $x \in \mathbb{R}$.

   $f(qx) = qf(x)$ for any $q \in \mathbb{Q} \implies f(rx) = rf(x)$ for $\ldots r \in \mathbb{R}$

   Does the RHS of the implication hold for: a) all r b) some (bot not all) r c) no r

   a) is correct. From the fact that $\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$ it follows that there is a sequence $(q_n)_{n\geq 1}$ where all $q_n \in \mathbb{Q}$ and $\lim_{n\to\infty} q_n = r$ (intuitively, we can approximate any real number arbitrarily well with rationals. Exercise: Prove that $\forall r \in \mathbb{R} \; \exists (q_n)_{n\geq 1} : \lim_{n\to\infty} q_n = r$ and $q_n \in \mathbb{Q}$ for all $n \geq 1$ is equivalent to $\mathbb{Q}$ dense in $\mathbb{R}$).

   $$rf(x) \overset{\lim_{n\to\infty} q_n = r}{=} \lim_{n\to\infty} q_n f(x) \overset{qf(x)=f(qx), q_n \in \mathbb{Q}}{=} \lim_{n\to\infty} f(q_n x) \overset{f \text{ is continuous}}{=} f(\lim_{n\to\infty} q_n x) \overset{\lim_{n\to\infty} q_n = r}{=} f(rx)$$

4. Let $(a_n)_{n\geq 1}$ be a sequence with the following properties:
   (a) $a_n \geq 0 \; \forall n \geq 1$
   (b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
   (c) a_n is decreasing

   Now consider
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$
   and
   $$S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$
   For even n, S_n is an upper bound for S. For odd n, a lower bound. Proof for even $n = 2m$: We write $S = \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k a_k + \sum_{k=2m+1}^{\infty} (-1)^k a_k = S_n + \sum_{m=1}^{\infty} -(a_{2m+1} - a_{2m+2})$. Now as $a_n \geq 0$ and $a_{2m+1} \geq a_{2m+2}$, $-(a_{2m+1} - a_{2m+2}) \leq 0$ and hence also $\sum_{m=1}^{\infty} -(a_{2m+1} - a_{2m+2}) \leq 0$. Together with $S = S_n + \sum_{m=1}^{\infty} -(a_{2m+1} - a_{2m+2})$ it follows that $S_n \geq S$.

2 Stetigkeit

Aufgabe (Grenzwert bei stetigen Funktionen "hineinnehmen"):
Bestimme $\lim_{n\to\infty} \exp(\frac{n^3+6}{n^3+2})$

Da $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+6}{n^3+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{6}{n^3}}{1+\frac{2}{n^3}} = 1$, erhalten wir mit der Stetigkeit von $\exp(\frac{n^3+6}{n^3+2})$: $\lim_{n\to\infty} \exp(\frac{n^3+6}{n^3+2}) = \exp(\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+6}{n^3+2}) = \exp(1) = e$

2.1 Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Für jedes z zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es $c \in [a, b]$ mit $f(c) = z$.

Aufgabe (Anwendung des Zwischenwertsatzes): Zeige, dass es $x \in [0, \pi]$ gibt mit, sodass $\sin(2x) - e^x = -5$
Wir definieren $f(x) = \sin(2x) - e^x$ (stetig, da $\sin(2x)$ als Komposition stetiger Funktionen $\sin(x)$ und $2x$ stetig ist, $-e^x$ stetig ist und die Summe stetiger Funktionen stetig ist) und wenden den Zwischenwertsatz mit $z = -5, a = 0, b = \pi$ an. Wir berechnen: $f(0) = \sin(0) - 1 = -1 > -5, f(\pi) = \sin(2\pi) - e^\pi = -e^\pi < -2^3 = -8 < -5$. Da -5 zwischen $f(0)$ und $f(\pi)$ liegt, gibt es $x \in [0, \pi]$, sodass $f(x) = -5$.

2.2 Min-Max-Satz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann gibt es $u, v \in [a, b]$, sodass $f(u) \leq f(x) \leq f(v)\ \forall x \in [a, b]$ (f nimmt ein Minimum und Maximum auf $[a, b]$ an).

Anmerkung: Wir könnten eine modifizierte Version des Min-Max-Satzes beweisen, wo das kompakte Intervall $[a, b]$ mit der endlichen Vereinigung von kompakten Intervallen $[a_1, b_1] \cup \cdots \cup [a_n, b_n]$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ersetzt ist.

2.3 Satz der Umkehrabbildung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton.
Dann existiert $f^{-1} : f([a, b]) \to [a, b]$, welches auch stetig und streng monoton ist.

Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton ist, können wir daraus schliessen, dass f injektiv ist. Wenn f nicht surjektiv ist (also $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$, zB. $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$), ist f nicht bijektiv und es existiert keine Umkehrfunktion auf ganz $\mathbb{R}$. Wenn wir die Definitionsmenge und Wertemengen von f bzw. f^{-1} einschränken, können wir $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definieren, was auf jeden Fall existiert, da $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ immer surjektiv ist. Im allgemeinen hat eine injektive Funktion immer eine linke Umkehrfunktion, eine surjektive Funktion eine rechte Umkehrfunktion (Vergleich zu Lineare Algebra: Wenn A vollen Spalten- oder Zeilenrang hat, ist die Pseudoinverse A^+ eine linke/rechte Umkehrfunktion).

Aufgabe (Umkehrfunktion berechnen):

Ansatz:

1. Schreibe $y = \dots$ statt $f(x) = \dots$
2. Forme auf $x = \cdots = f^{-1}(y)$ um

Sei $f(x) = \ln(x - 35) + 2, f : (35, \infty) \to \mathbb{R}$. Bestimme die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to (35, \infty)$. $y = \ln(x - 35) + 2 \iff y - 2 = \ln(x - 35) \iff \exp(y - 2) = x - 35 \iff x = \exp(y - 2) + 35 = f^{-1}(y)$

2.4 Lipschitz stetig

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig, falls es ein $C > 0$ gibt, sodass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Geometrisch: Die Steigung der Gerade durch beliebige zwei Punkte des Graphen von f ist durch C beschränkt

Lipschitz-stetig $\implies$ stetig

Beweisskizze: Sei $x_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Wir finden ein $\delta > 0$, sodass $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0| < C\delta < \varepsilon \iff \delta < \frac{\varepsilon}{C}$

3 Konvergenz von Funktionenfolgen

$f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^D$ ist eine Funktionenfolge, also für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subset \mathbb{R}$

3.1 Punktweise Konvergenz

Für ein fixes $x \in D$ betrachten wir, ob die Folge $f_n(x)$ konvergiert (mit der normalen Definition von Konvergenz von Folgen).

Definition: f_n konvergiert punktweise gegen f, falls:

$$\forall x \in D \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

3.2 Gleichmässige Konvergenz

Definition: f_n konvergiert gleichmässig gegen f, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N \, \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Diese Art der Konvergenz ist stärker als punktweise Konvergenz, N darf nicht von x abhängen. Statt dass wir für ein fixes x die Folge $f_n(x)$ betrachten, sehen wir f_n und f in dieser Definition mehr als eigene Objekte (Nebenbemerkung, nicht in Vorlesung behandelt: Wenn wir den Absolutbetrag in der Definition von Konvergenz von Folgen mit der Supremumsnorm $\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|$ ersetzen und den Vektorraum beschränkter reeller Funktionen betrachten, ist diese Konvergenz gleichmässig. Generell könnte man alle Definitionen von Konvergenz statt nur für relle Folgen allgemeiner mit einer beliebigen Metrik formulieren).

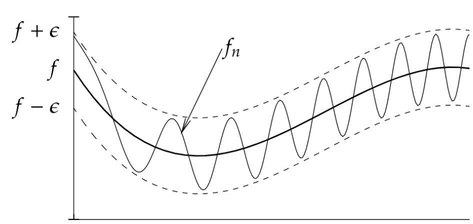

Figure 1: Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es ein N, sodass der Graph von f_n für $n \geq N$ vollständig innerhalb des $\varepsilon-$Schlauchs um f ist.

Eine alternative Definition von gleichmässiger Konvergenz macht Beweise oft einfacher:

$$\lim_{n\to\infty}(\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|)=0$$

Anmerkungen:

- $\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=\sup\{|f_n(x)-f(x)|\mid x\in D\}$
- Die obige Definition enthält kein $\limsup$
- Es kann hilfreich sein, das Maximum von $|f_n(x)-f(x)|$ mittels der Ableitung zu bestimmen (kommt demnächst in der Vorlesung)
- (Aufgabe: Beweise, dass $f_n\to f$ gleichmässig, genau dann, wenn die obige Aussage gilt)

Ansatz:

1. Punktweisen Grenzwert f bestimmen
2. Überprüfen, ob f_n auch gleichmässig gegen f konvergiert (mit einer der beiden oben beschriebenen Definitionen)

Wichtige Resultate/Fakten:

- Gleichmässige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz

  Wenn also f_n nicht punktweise konvergiert, kann die Funktionenfolge auch nicht gleichmässig konvergieren. Falls f_n sowohl punktweise, als auch gleichmässig konvergiert, ist der Grenzwert derselbe. Das begründet auch, warum der Ansatz oben funktioniert.

- Falls $f_n\to f$ gleichmässig und f_n für alle $n\in\mathbb{N}$ stetig ist, ist auch f stetig

  Falls wir entscheiden müssen, ob f_n gegen f gleichmässig konvergiert und f_n ist für beliebige n stetig, f aber nicht, können wir sofort schliessen, dass f_n nicht gleichmässig gegen f konvergieren kann (Kontrapositiv der obigen Aussage)

Beispiele:

1. $f_n(x)=x^n$ für $x\in[0,1]$
2. $g_n(x)=\frac{x}{n}$

   Für ein fixes x gilt: $\lim_{n\to\infty}g_n(x)=0$. Jedoch konvergiert g_n nicht gleichmässig gegen 0, da x beliebig gross sein kann (insbesondere so gross wie N, die Negation der Definition gleichmässiger Konvergenz gilt für $\varepsilon=1/2, n=N, x=N$)
3. $h_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n}$

4 Hints

6.2.: Beispiel: $\exp(2x + 3)$ ist stetig, da $2x + 3$ und $\exp(x)$ stetig sind und die Verknüpfung stetiger Funktionen stetig ist.

6.3.: 2

6.4.: 2.1

6.5.: 2.3

6.6.: 3.2

Quelle von Figure 1