

# Exercise Session 7

Felix Breuer

FS 2024

## 1 Quiz

For statements (where no prompt like "Find ..." is given), determine if they are true or false (and why).

1. Let  $f_n$  converge uniformly to  $f$ .

$\exists N \forall n \geq N : f_n$  is bounded  $\iff f$  is bounded

True. Proof of direction  $\Rightarrow$ : We have that  $|f_n(x)| \leq C$  for all  $x \in D, n \geq 1$ . Let  $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$  such that  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

$|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)| \leq \varepsilon + C$ . The other direction follows analogously.

2. Let  $f_n \rightarrow f, g_n \rightarrow g$  pointwise. Then  $f_n g_n \rightarrow fg$  pointwise

True, follows from limit rules of sequences.

3. Let  $f_n \rightarrow f, g_n \rightarrow g$  uniformly. Then  $f_n g_n \rightarrow fg$  uniformly

False. Counterexample:  $f_n(x) = x \rightarrow x$  uniformly,  $g_n(x) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  uniformly. However,  $f_n(x)g_n(x) = \frac{x}{n}$  does not converge uniformly.

The statement is true however if we additionally demand that  $f_n$  and  $g_n$  are bounded.

Let  $\varepsilon > 0$  be arbitrary.  $|f_n(x)| \leq C, |g_n(x)| \leq C$  for some  $C > 0$ .

$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| = |f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x) + f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \leq |f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x)| + |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| = |f_n(x)||g_n(x) - g(x)| + |g(x)||f_n(x) - f(x)| < C\varepsilon' + C\varepsilon'$  for any  $\varepsilon' > 0$ . Choosing  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2C}$  yields the desired result.

4. ( $f_n \rightarrow f$  uniformly,  $f_p$  continuous  $\iff p$  prime)  $\implies f$  continuous

True.  $f_p$  for  $p$  prime is a subsequence of  $f_n$  that also converges to  $f$ .  $f$  is continuous using the result that if  $f_n \rightarrow f$  uniformly and  $f_n$  continuous  $\forall n \geq 1$ ,  $f$  is also continuous.

## 2 Gleichmässige Konvergenz continued

Beweis von Charakterisierung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|) = 0$$

Aufgaben:

1. Begründe auf drei verschiedene Arten, warum  $f_n(x) = x^n$  auf  $[0, 1]$  nicht gleichmässig konvergiert
2. Zeige, dass  $f_n(x) = 1 + x^n(1-x)^n$  gleichmässig gegen 1 konvergiert ( $D = [0, 1]$ )

$$0 \leq x(1-x) = x - x^2 = -(x - 1/2)^2 + 1/4 \leq 1/4$$

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |1 + (x(1-x))^n - 1| = \sup_{x \in [0, 1]} |(x(1-x))^n| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |(1/4)^n| = (1/4)^n \rightarrow 0.$$

## 3 Potenzreihen: Gleichmässige Konvergenz und Stetigkeit

Recap: Siehe Woche 4.

Wir betrachten die Potenzreihe  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$  mit Konvergenzradius  $\rho$ .

1.  $S_n(x)$  konvergiert gleichmässig auf  $[-r, r]$  für  $r$  mit  $0 \leq r < \rho$   
Wichtig:  $S_n(x)$  ist nicht unbedingt auf  $(-\rho, \rho)$  gleichmässig konvergent. Intuitiv kann es zu einem Problem führen, wenn  $x$  sehr nahe an  $\rho$  ist und  $S_n(x)$  für  $x = \rho$  nicht konvergiert. Aufgabe 7.3 a) fragt hierzu nach einem Gegenbeispiel.
2.  $S_n(x)$  ist stetig auf  $(-\rho, \rho)$

Aufgabe: Bestimme den Konvergenzradius  $\rho$  von  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})^n}{n^2} x^n$  und zeige Konvergenz bei  $-\rho, +\rho$ .

## 4 Trigonometrische Funktionen

In der Vorlesung wurden  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$  als Funktionen von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$  als Potenzreihen definiert.

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k)!}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} (-1)^k$$

Wichtigste Resultate/Identitäten

Als Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind  $\cos$  und  $\sin$  stetig.

1.  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$  (Eulersche Formel)

Zusammenhang zu geometrischer Definition:  $e^{ix}$  ist eine komplexe Zahl am Rand des Einheitskreises, Rotation gegen den Uhrzeigersinn um  $x$ .  $\cos(x)$  ist Projektion auf reelle Achse,  $\sin(x)$  auf die komplexe Achse.

2.  $\cos(x) = \cos(-x)$  (gerade Funktion)  
 $\sin(-x) = -\sin(x)$  (ungerade Funktion)

3.

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Leiten sich aus der Eulerschen Formel ab, oft hilfreich, um Identitäten herzuleiten.

4.  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$  (intuitiv am Einheitskreis mit Satz von Pythagoras)
5.  $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$   
 $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$   
 (Additionsformeln; kann man mit (3) zeigen)

Zwei typische Aufgabentypen sind, Linearkombinationen von  $\sin(kx)$ ,  $\cos(kx)$  zu Linearkombinationen von Produkten von  $\sin^k(x)$ ,  $\cos^k(x)$  umzuschreiben (und andersherum, diese Richtung wird beim Bestimmen von Integralen hilfreich sein).

Linearkomb. von  $\sin(kx)$ ,  $\cos(kx) \longleftrightarrow$  Linearkomb. von Produkten von  $\sin^k(x)$ ,  $\cos^k(x)$

$\longrightarrow$ :

- Additionsformeln wiederholt anwenden, siehe hier

- $\sin(kx) = \operatorname{Im}(e^{ikx}) = \operatorname{Im}((e^{ix})^k) = \operatorname{Im}((\cos(x) + i \sin(x))^k)$  ausmultiplizieren mit Binomischer Formel

←:

- $\sin^k(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^k$

$$\cos^k(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^k$$

Ausmultiplizieren mit Binomischer Formel, dann vereinfachen mit  $\sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$

- 1) Schreibe  $\cos^4(x)$  als Linearkombination von  $\cos(kx), \sin(kx), k \in \mathbb{N}$  (keine Potenzen!)

$$\begin{aligned} \cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}) = \\ &= \frac{1}{8}\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} + \frac{1}{2}\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + \frac{3}{8} = \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

- 2) Schreibe  $\sin(3x)$  als Linearkombination von Produkten von Potenzen  $\sin^k(x), \cos^k(x)$

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \operatorname{Im}(e^{i3x}) = \operatorname{Im}((e^{ix})^3) = \operatorname{Im}((\cos(x) + i \sin(x))^3) = \operatorname{Im}(\cos^3(x) + \\ &+ 3\cos^2(x)i \sin(x) + 3\cos(x)i^2 \sin^2(x) + i^3 \sin^3(x)) = \operatorname{Im}(\cos^3(x) + i3\cos^2(x)\sin(x) - \\ &- 3\cos(x)\sin^2(x) - i \sin^3(x)) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) \end{aligned}$$

## 5 Hints

7.2.: Hier ist entscheidend, dass gleichmässige Konvergenz vorausgesetzt wird. Versuche, mit dem Cauchy-Kriterium für gleichmässige Konvergenz von  $S_n = \sum_{k=0}^n c_k x^k$  mit  $m = n - 1$  einen Widerspruch herzuleiten (durch Wahl eines  $x$ , das zu einem Widerspruch zur Aussage des Cauchy-Kriteriums führt).

7.3.: Versuche es mit Potenzreihen, die durch möglichst einfache Folgen  $c_k$  definiert sind

Extraaufgabe: Finde eine Potenzreihe, die gleichmässig in  $[-r, \rho)$  konvergiert für  $0 \leq r < \rho$ , aber nicht in  $(-\rho, \rho)$  gleichmässig konvergiert.

7.4.: Hier ist die Idee, die Werte analytisch (nicht geometrisch) mit Resultaten aus der Vorlesung (insbesondere Korollar 3.8.3, double angle formulas) und schon bekannten Werten von  $\sin / \cos$  zu bestimmen.

7.5.: Siehe 4

7.6.: Verwende Additionsformeln