

# Exercise Session 8

Felix Breuer

FS 2024

## 1 Grenzwerte von Funktionen

**Definition über Folgen:** Sei  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$ .  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , falls:

$$\forall (a_n)_{n \geq 1} \text{ in } D \setminus \{x_0\} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$$

In der Vorlesung wurde die obige Definition zuerst eingeführt, da wir damit auf einen Schlag alle Fälle von  $x_0, A \in \mathbb{R}, = \pm\infty$  abdecken können (durch die jeweiligen Definitionen von Konvergenz von Folgen), ohne jeweils eine eigene Definition einzuführen.

Folgende Definition ist sehr gebräuchlich:

**$\varepsilon - \delta$ -Definition** ( $x_0, A \in \mathbb{R}$ ): Sei  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  ein Häufungspunkt von  $D$ ,  $A \in \mathbb{R}$ .  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \setminus \{x_0\} \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

Für die Fälle, dass  $x_0 = \pm\infty$  oder  $A = \pm\infty$ , sind die Definitionen anders:

**$\varepsilon - \delta$ -Definition** ( $x_0 \in \mathbb{R}, A = \pm\infty$ ): Sei  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  ein Häufungspunkt von  $D$ ,  $A \in \mathbb{R}$ .  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , falls:

$$\forall C > 0 \exists \delta > 0 : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \setminus \{x_0\} \implies f(x) > C$$

wobei man im Fall  $A = -\infty$   $f(x) > C$  mit  $f(x) < C$  ersetzt.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ , falls:

$$\forall \delta < 0 \exists \varepsilon > 0 : x \in (\varepsilon, \infty) \cap D \setminus \{x_0\} \implies f(x) < \delta$$

**$\varepsilon - \delta$ -Definition** ( $x_0 = \pm\infty, A \in \mathbb{R}$ ): Sei  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R}$ .  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ , falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T > 0 : x \in (T, \infty) \cap D \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

wobei man im Fall  $x_0 = -\infty$   $(T, \infty)$  mit  $(-\infty, -T)$  ersetzt.

1. Warum muss  $x_0$  ein Häufungspunkt sein?

Intuitiv: Wenn  $x_0$  kein Häufungspunkt ist, gibt es keine Folge in  $D \setminus \{x_0\}$ , die gegen  $x_0$  konvergiert, womit nicht klar ist, wie (mit welcher Folge) man sich überhaupt an  $x_0$  annähern kann.

Über Definition: Wenn  $x_0$  kein Häufungspunkt ist, ist die linke Seite der Folgendefinition immer wahr, womit die Implikation wahr ist, egal welchen Wert  $A$  annimmt.

2. Mit der Definition über Folgen kann man Divergenz zeigen: Wenn man zwei Folgen  $(x_n), (y_n)$  in  $D \setminus \{x_0\}$  findet, die jeweils gegen  $x_0$  konvergieren, aber  $f(x_n)$  gegen einen anderen Grenzwert als  $f(y_n)$  konvergiert, kann die Definition für kein  $A$  wahr sein.

Warmup-Aufgaben (zum Üben mit der  $\varepsilon - \delta$ -Definition):

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3x + 4 = 10$$

Für ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  müssen wir ein  $\delta > 0$  finden, sodass  $0 < |x - 2| < \delta \implies |3x + 4 - 10| < \varepsilon$ .

$|3x + 4 - 10| = |3x - 6| = 3|x - 2| < \varepsilon \iff |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Für  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$  gilt die Behauptung.

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + x - 1 = 5$$

$|x^2 + x - 6| = |(x+3)(x-2)| = |x+3||x-2|$ .  $|x-2|$  können wir mit  $\delta$  abschätzen,  $|x+3|$  auch! Da wir  $\delta$  beliebig wählen können, können wir es beliebig von oben beschränken. Für  $\delta = 1$  gilt, dass  $|x-2| < 1$ . Durch Auflösen des Betrags erhält man  $-1 < x - 2 < 1 \implies 1 < x < 3$ , womit  $|x+3| < 6$ . Insgesamt haben wir  $|x+3||x-2| < 6\delta = \varepsilon \iff \delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{6})$ .

### Wichtige Resultate

1. Rechenregeln
2. Sandwich-Lemma
3. Charakterisierung von Stetigkeit

$f$  ist bei  $x_0$  stetig genau dann, wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert und  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

4. Substitution/Grenzwert hineinziehen

Sei  $f$  stetig bei  $x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ . Dann gilt:  $f(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x))$

### Übliche Ansätze

1. Wurzeltrick
2. Stetigkeit verwenden: Grenzwert "hineinziehen"
3. Ausdruck umschreiben mit  $\exp(\ln(\dots))$  (danach meist Stetigkeit von  $\exp$ , Logarithmus-Regeln)
4. Abschätzungen (zB. mit Taylorentwicklung/Definition durch Potenzreihe bei  $\sin, \cos$ )
5. Bei Brüchen mit Polynomen: Faktorisieren  
Die folgenden Ansätze haben wir nicht in der Übungsstunde besprochen. Wir werden, sobald L'Hospital in der Vorlesung war, noch Aufgaben dazu machen
6. Substitution
7. (L'Hospital)

Aufgaben: Bestimmung von Grenzwerten

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\cos(x)|}{x} = \infty$$

$\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$  (Beweis zB. mit Definition von  $\cos(x)$  als Reihe und Abschätzung alternierender Reihen,  $|x| < 1$ . Die Ungleichung gilt generell aber für beliebige  $x$ ). Für ein beliebiges  $C > 0$  müssen wir zeigen, dass es ein  $\delta > 0$  gibt, sodass für  $x > 0, x \in (-\delta, +\delta) : \frac{|\cos(x)|}{x} > C$ . Wir schätzen ab:  $\frac{|\cos(x)|}{x} > \frac{|1 - \frac{x^2}{2}|}{x} > \frac{1/2}{x} = \frac{1}{2x}$ , da für  $|x| < 1$   $|1 - \frac{x^2}{2}| > 1/2$  gilt.  $\frac{1}{2x} > C \iff x < \frac{1}{2C}$ . Wir wählen also  $\delta = \min(1, \frac{1}{2C})$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(\cos^2(x^2 - 1))}{x - e^x} = 0$$

Wir können die Stetigkeit der Funktion in 1 verwenden und erhalten  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(\cos^2(x^2 - 1))}{x - e^x} = \frac{\log(\cos^2(1^2 - 1))}{1 - e^1} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 1/2$$

Wir formen die Funktion um (Wurzeltrick):  $\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2}) = \frac{(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2})(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2})}{(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2})} = \frac{x}{(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2})} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1} \rightarrow 1/2$  (mit Stetigkeit)

## 2 Quiz

For statements (where no prompt like "Find ..." is given), determine if they are true or false (and why).

1. If in the definition of convergence of  $f$  to  $L$  when  $x \rightarrow x_0$ , a suitable  $\delta$  makes the statement true, any smaller positive  $\delta'$  also works  
True,  $(x_0 - \delta', x_0 + \delta') \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  for  $0 < \delta' < \delta$ , or  $0 < |x - x_0| < \delta \implies 0 < |x - x_0| < \delta' < \delta$ .
2. If  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  and  $a$  is in the domain  $D$  of  $f$ , then  $L = f(a)$   
False, consider  $a = 0, f(x) = 0$  for  $x \neq 0, f(x) = 1$  for  $x = 0$ . Then  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$ . The claim would hold with the additional assumption that  $f$  is continuous. In general though, the definition of convergence makes no statement about the value of  $f$  at  $x_0$ .
3. If  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , then  $\lim_{x \rightarrow a} 3(f(x) - 2)^2 = 3(L - 2)^2$   
True, use either algebraic limit rules ("Rechenregeln") or continuity of  $g(x) = 3(x - 2)^2$ .
4. If  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , then  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$  for any function  $g$  (with same domain  $D$  as  $f$ )  
False. Counterexample: For  $a = 0, f(x) = x$  converges to 0.  $f(x)g(x) = x/x^2 = 1/x \rightarrow \infty$ .

Weitere Aufgaben:

Bestimme folgende Grenzwerte (mit Beweis):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 8x + 15}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x\sqrt{1-x}$$

Beweise die "Rechenregeln" (algebraic limit theorem für Grenzwerte von Funktionen, Bemerkung 3.10.4 (3) im Skript) für die Fälle, wo  $x_0 = \pm\infty$  oder  $A, B = \pm\infty$

## 3 Hints

8.2.: Verwende die Folgen-Definition

8.3.: Versuche zuerst, intuitiv (ohne ganz formales Argument) die Grenzwerte zu bestimmen und danach deine Antwort konkret zu begründen. Manche der oben beschriebenen Ansätze könnten hilfreich sein.

8.4.: Schreibe  $2^x = \exp(\ln(2^x))$  als Potenzreihe und wähle ein Glied der Reihe als untere Schranke, sodass die Schranke dividiert durch  $x^k$  noch immer gegen  $\infty$  konvergiert.

8.5.: Verwende die Folgen-Definition in (a) und Stetigkeit von  $f(x)$  in (b).