Exercise Session 9

Felix Breuer

FS 2024

1 Quiz

For statements (where no prompt like "Find ..." is given), determine if they are true or false (and why).

1. Sketch $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, the inverse function of $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$

   To sketch arcsin, we first sketch $\sin(x)$ and then reflect its graph along the $y = x$ axis (equivalently, we could also rotate the graph counterclockwise by 90 degrees and then reflect it along the x-axis).

   Why does this work? Let g denote the inverse function of f. Per definition, $f(x) = y \iff g(y) = x$. Consider the graph G of f as a set of pairs $(x, f(x))$. Applying the definition of the inverse function of f, we get $(x, f(x)) = (g(y), y)$. Hence $(y, g(y))$ is a point in the graph of g if and only if $(g(y), y)$ is a point in that of f. Switching the order of the pairs corresponds to a reflection along the $y = x$ axis.

2. Assuming $\sum_{n\geq 0} a_n$ converges, $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ converges to 0 (as $N \to \infty$)

   True. Proof: Let $N \in \mathbb{N}$.

   $L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{n} a_k) = \sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$

   Taking the limit $N \to \infty$ results in:

   $L = \lim_{N\to\infty} L = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k = L + \lim_{N\to\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$, hence $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k = 0$. Taking terms out of the limit is justified by the fact that if $a_n \to a$ and $a_n + b_n \to c$, b_n converges to $c - a$.

3. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be continuous. $f(q) = 0 \;\forall q \in \mathbb{Q} \implies f(x) = 0 \;\forall x \in \mathbb{R}$

   True. Proof: As $\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$, for any real number r, there is a rational sequence q_n with $\lim_{n\to\infty} q_n = r$. $f(r) = f(\lim_{n\to\infty} q_n) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$ where we used (in the following order) that $\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$, f is continuous, the assumption.

4. $\lim_{x\to\infty} f(-x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ (assuming both limits exist and are finite)

   True. We inspect the definition: $A = \lim_{x\to\infty} f(-x)$, if $\forall\varepsilon > 0\ \exists T > 0\ \forall x > T : |f(-x) - A| < \varepsilon$. Now we substitute $-x = y$ to get $\forall\varepsilon > 0\ \exists T > 0\ \forall -y > T : |f(y) - A| < \varepsilon$. $-y > T \iff y < -T$ which makes the definition equivalent to that of $B = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.

   It's also possible to prove that computing limits via substitution works for more general functions than $g(x) = -x$. In the lecture we proved that $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to a} f(g(x))$ when $g(x) \to b$ (as $x \to a$) and f is continuous at b. An alternative assumption to f continuous is that there is some neighbourhood around a where $g(x) \neq b$ (the proofs are almost the same, I encourage you to try them).

2 Differenzialrechnung

Definition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$, wobei I ein Intervall ist und x_0 ein Häufungspunkt von I. f ist in x_0 differenzierbar, falls

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert (und nicht $\pm\infty$ ist).

Die Ableitung bei x_0 ist insofern die Steigung am Punkt x_0, dass sie der Grenzwert der Steigung der Sekante durch x und x_0 ist, wobei x gegen x_0 geht, was äquivalent zur Steigung der Tangente bei x_0 ist.

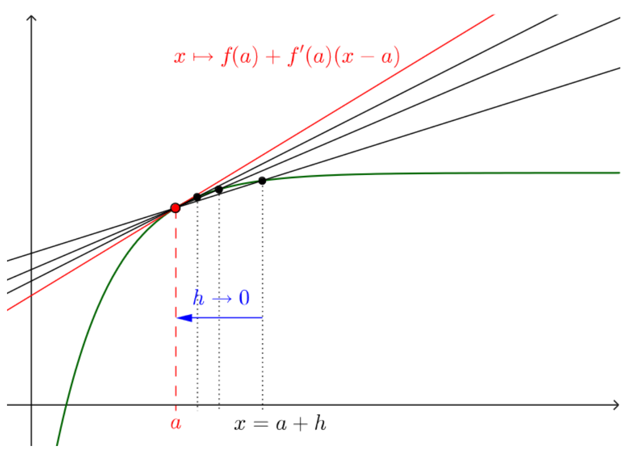

Figure 1: Quelle

Sehr oft ist es nützlich, die Substitution $x = x_0 + h$ zu machen, womit man folgenden Grenzwert erhält:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Als nächstes betrachten wir ein Resultat, dass es uns erlaubt, die Tangente bei x_0 ($g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$) mit Steigung $f'(x_0)$ als "beste" affin lineare Approximation von f in der Nähe von x_0 zu sehen:

- f differenzierbar bei $x_0 \implies f(x) = f(x_0) + f'(x_0)h + r(h)$, wobei $r(h) \in o(h)$

$r(h) \in o(h)$, falls $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. Intuitiv konvergiert $r(h)$ viel schneller als linear gegen 0 als f.

Auch die andere Richtung ist wahr:

- $f(x) = a + bh + r(h)$, wobei $r(h) \in o(h) \implies f$ ist differenzierbar bei x_0, wobei $a = f(x_0), b = f'(x_0)$

Allgemein ist $f \in o(g)$, falls $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Es gilt, dass $o(f) \subsetneq O(f) \setminus \Theta(f)$ (siehe hier für eine allgemeine Definition der O-Notation für reelle Funktionen, die in AnD/der Übungsstunde ist nur für Folgen).

Wir können dieses Resultat nutzen, um Ableitungsregeln zu beweisen oder Ableitungen mancher Funktionen abzulesen.

Beispiel: Sei $f(x) = x^2$:

$$(x_0 + h)^2 = {x_0}^2 + 2x_0h + h^2 = f(x_0) + f'(x_0)h + r(h)$$

2.1 Differenzierbar impliziert stetig (aber nicht andersherum)

- f differenzierbar bei $x_0 \implies f$ stetig bei x_0:

$\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x - x_0) \overset{(*)}{=} f'(x_0) \cdot 0 = 0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, was äquivalent zu Stetigkeit von f bei x_0 ist.

Hier ist der Schritt $(*)$ wie folgt begründet: Per Annahme (f differenzierbar bei x_0) gilt $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$. Ausserdem ist $\lim_{x\to x_0}(x - x_0) = 0$.

Um zu zeigen, dass die andere Richtung allgemein nicht gilt, geben wir ein Gegenbeispiel an:

- f stetig bei $x_0 \not\Longrightarrow f$ differenzierbar bei x_0:

$$f(x) = |x|, x_0 = 0$$

Um zu zeigen, dass der Grenzwert $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ nicht existiert, finden wir zwei Folgen x_n, y_n, die beide gegen 0 konvergieren, wo aber $f(x_n)$ einen anderen Grenzwert als $f(y_n)$ hat. Sei $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{-1}{n}$. $\lim_{x\to 0} x_n = \lim_{x\to 0} y_n = 0$, aber $\lim_{x\to 0} \frac{|1/n|}{1/n} = 1 \neq \lim_{x\to 0} \frac{|-1/n|}{-1/n} = -1$.

3 Ableitungsregeln

Die wichtigsten Ableitungsregeln sind im Skript unter Satz 4.1.9 und Satz 4.1.11. zusammengefasst:

1. Linearität
2. Produktregel
3. Quotientenregel
4. Kettenregel
5. Ableitung von Umkehrfunktionen (dazu besprechen wir nächste Woche eine Aufgabe)

Wichtige Ableitungen:

- $\exp'(x) = \exp(x)$
- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
- $\sin'(x) = \cos(x)$
- $\cos'(x) = -\sin(x)$

Aufgabe: Berechne die jeweilige Ableitung

$$(x^x)' = (\exp(\ln(x^x)))' = (\exp(x\ln(x)))' = \exp'(x\ln(x))(x\ln(x))' = \exp(x\ln(x))(\ln(x)+\frac{1}{x}x) = x^x(\ln(x)+1)$$

$$(\ln(\ln(x+1)))' = \frac{1}{\ln(x+1)(x+1)}$$

$$(\sqrt{1+x^2})' = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(x^{\sin(x)})' = (\exp(\sin(x)\ln(x)))' = x^{\sin(x)}(\cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x})$$

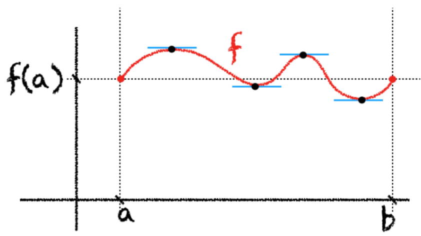

Figure 2: Quelle

4 Der Mittelwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar.

Satz von Rolle

$$f(a) = f(b) \implies \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

Wenn f an beiden Endpunkten des Intervalls den gleichen Wert annimmt, ist die Steigung von f an mindestens einem Punkt auf (a, b) 0.

Mittelwertsatz

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

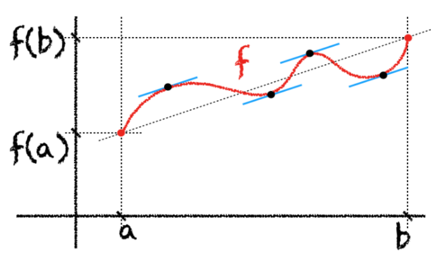

Figure 3: Quelle

Zumindest an einem Punkt in (a, b) ist die Steigung von f exakt die durchschnittliche Steigung von f auf (a, b).

Aufgaben:

- f differenzierbar auf $[a, b]$, $f'(x) \neq 0 \; \forall x \in [a, b] \implies f$ ist injektiv (per Definition: $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$)

Sei $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Wir wenden den Mittelwertsatz mit dem Intervall (x_1, x_2) an: Es gibt ein $c \in (x_1, x_2)$, sodass $f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \neq 0$, was impliziert, dass $f(x_2) - f(x_1) \neq 0 \iff f(x_2) \neq f(x_1)$. Alternativ kann man auch das Kontrapositiv des Satzes von Rolle für beliebige $x_1 < x_2$ verwenden.

- f differenzierbar auf $[a, b], f'(x) \neq 1 \; \forall x \in [a, b] \implies f$ hat maximal einen Fixpunkt (einen Punkt x, wo $f(x) = x$)

  Wir nehmen für einen Widerspruch an, dass es zwei Fixpunkte $x < y$ gibt, für die $f(x) = x, f(y) = y$ gilt. Durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf f beschränkt auf das Intervall (x, y) erhalten wir, dass es ein $c \in (x, y)$ gibt, sodass $f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Per Annahme: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{x_2-x_1}{x_2-x_1} = 1$. Jedoch haben wir auch angenommen, dass $f'(c) \neq 1$, ein Widerspruch, womit die Behauptung gilt.

- Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ auf $[-1, 1]$ differenzierbar und f' auf $[-1, 1]$ stetig. Zeige, dass $f(0) > f(1) \implies \exists a, b$ mit $0 < a < b < 1$, sodass $f'(x) < 0 \; \forall x \in [a, b]$

  Idee: $f(0) > f(1)$, somit gibt es zumindest einen Punkt c mit negativer Ableitung (Mittelwertsatz). Da f' per Annahme stetig ist, können wir auch eine Umgebung um c finden, in der f' negativ ist sind (mit $\varepsilon - \delta$ Definition). Ich empfehle, diesen Beweis selbst aufzuschreiben - ist eine gute Übung zur Anwendung des Mittelwertsatzes und von Stetigkeit.

5 Hints

9.2., 9.4. a): Anwendung von Ableitungsregeln, aus Vorlesung bekannten Ableitungen

9.3.: Definition der Ableitung, Verwendung der Annahme, Substitution

9.5. a): Satz aus Vorlesung (Ableitungsregeln), um Differenzierbarkeit zu schliessen

9.5. b): Ableitungsregeln, Resultat von a), Korollar 4.2.5. (1)

9.5. c): Korollar 4.2.5. (4)

9.5. e): Ableitungsregel für Inverse aus Vorlesung. Um zu Folgern, dass g bijektiv ist, kann man die Resultate von c) und d) verwenden.

9.5. f): Verwende das Resultat von c)

9.5. g): Verwende Resultate von a), f)

9.5. h): Verwende das Resultat von g)

9.5. i): Verwende Resultate von b), f) und die Ableitungsregel für Umkehrfunktionen

9.5. h): Siehe erste Quiz-Frage (erste Seite)